

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Activité : Mousse au chocolat

Introduction

Ce document a un double objectif :

- identifier les différentes procédures pouvant être mises en œuvre par un élève de cycle 3 pour résoudre un problème de proportionnalité ;
- mettre en lumière comment le choix des nombres en jeu dans un exercice va influencer sur les procédures utilisées pour le résoudre.

L'objectif n'est pas, au cycle 3, de faire un cours théorique sur les différentes procédures permettant de traiter un problème de proportionnalité. La connaissance du nom de chacune de ces procédures n'est pas attendue des élèves ; il s'agit d'une connaissance de l'enseignant. En revanche, les élèves devront connaître l'existence des différentes méthodes permettant de résoudre un problème de proportionnalité. Ils auront dans leur cahier des exemples de traitement d'exercices génériques selon les différentes méthodes possibles. Lors de temps de mise en commun, ils pourront comparer ces différentes méthodes et se rendre compte que, pour un exercice donné, certaines peuvent être plus efficaces que d'autres. On se gardera cependant de hiérarchiser ces méthodes, aucune n'étant plus « experte » que les autres ; l'élève doit apprendre à s'adapter face à un problème pour mobiliser une procédure lui permettant de le résoudre. Pour un élève donné, les procédures pouvant être utilisées pour résoudre un problème seront plus ou moins coûteuses au regard des connaissances dont il dispose au moment de la résolution, notamment en calcul mental. Elles nécessiteront plus ou moins de calculs complexes. Pour un élève donné, l'efficacité d'une procédure pour résoudre un problème donné pourra évoluer, en fonction de ses connaissances, entre le début et la fin du cycle 3.

Exercice 1

Énoncé

Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 24 personnes ?
J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Exemples de réponses d'élèves

Élève A

Pour 24 personnes il faut 16 œufs.

~~Il faut faire une division~~ Il faut faire des additions

$$9 + 15 = 24 \quad 10 + 6 = 16$$

Élève B

9 pers = 6 œufs

15 pers = 10 œufs

24 pers = 16 œufs

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 6 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 9 \\ \hline 24 \end{array}$$

Il faut 16 œufs pour 24 personnes

Les deux élèves ont utilisé ici une procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition¹. Cette procédure est encouragée par l'énoncé. On aura noté ici qu'une seule des deux données aurait suffi pour répondre à la question posée, mais il aurait alors fallu utiliser une autre procédure.

Exercice 2

Énoncé

Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 6 personnes ?
J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Exemples de réponses d'élèves

Élève C

$10 - 6 = 4$
 Il faut prévoir 4 œufs

Élève D

10 œufs \rightarrow 15 pers
 6 œufs \rightarrow 9 pers.
 ? \rightarrow 6 pers.
 1 œuf \rightarrow 1,5 personne
 2 œufs \rightarrow 3 pers.
 4 œufs \rightarrow 6 pers.

L'élève C a utilisé ici une procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition². Il a vu sans l'écrire que 15 personnes - 9 personnes = 6 personnes.

Cette procédure est encouragée par l'énoncé. On aura noté ici que, comme pour l'exercice précédent, une seule des deux données aurait suffi pour répondre à la question posée, mais il aurait alors fallu utiliser une autre procédure.

L'élève D a utilisé plusieurs fois la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre³. Il a écrit la seconde relation « 6 œufs à 9 pers. » dont il ne s'est finalement pas servi. En effet il a tiré de la relation « 10 œufs à 15 pers. », qu'il fallait 1 œuf pour 1,5 personne en divisant par 10 et en utilisant ses connaissances des nombres décimaux. En multipliant ensuite deux fois par 2 pour passer de 1,5 personne à 6 personnes, il a obtenu le nombre d'œufs cherchés.

2. $f(6) = f(15 - 9) = f(15) - f(9)$

3. $f(6) = f(2 \times 2 \times 1,5) = 2 \times 2 \times f(1,5) = 4 \times f(0,1 \times 15) = 4 \times 0,1 \times f(15) = 0,4 \times 10 = 4$

Exercice 3

Énoncé

Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 45 personnes ?
J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Exemples de réponses d'élèves

Élève E

Handwritten work for Élève E:

$$\begin{array}{r} 45 \\ -45 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 5 \times 6 = 30 \end{array} \quad 9 \times 5 = 45$$

Il faut 30 œufs pour 45 personnes.

Élève F

Handwritten work for Élève F:

Diagram showing 9 triangles, each with 6 eggs at its base, connected to a horizontal bar representing the total number of eggs.

$$6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} = 30 \text{ œufs}$$

il faut 30 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 45 personnes.

L'élève E a utilisé une procédure s'appuyant sur la propriété de linéarité pour la multiplication⁴ par un nombre. Cet exercice peut d'ailleurs être traité sans parler de proportionnalité, comme un exercice multiplicatif dès le cycle 2.

L'élève F a utilisé une procédure s'appuyant sur la propriété de linéarité pour l'addition, une addition itérée qui est ici très proche d'une multiplication.

Exercice 4

Énoncé

Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 3 personnes ?
J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Exemples de réponses d'élèves

Élève G

$$\begin{array}{r|l} 6 & 9 \\ -6 & \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Comme on a besoin d'œufs pour 3 personnes au lieu de 9 il faut 3 fois moins.
Donc 2.

Élève H

$$9 : 3 = 3$$

$$* 6 : 3 = 2$$

$$=$$

$$2 \times 3$$

Il faut 2 œufs pour 3 personnes

Les deux élèves ont utilisé la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre⁵.

Exercice 5

Énoncé

Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 15 personnes ?
J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Exemples de réponses d'élèves

Élève I

5 est la moitié de dix 3 est la moitié de 6

- Si pour 10 personnes il me faut 6 œufs alors pour 15 personnes il me faudra 9 œufs car les 3 œufs représente les 5 personnes qu'on a rajouté à 10.

$$\begin{array}{r} +6 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

Élève K

6 œuf pour 10 personnes
9 œuf pour 15 personnes

$$3 + 3 + 3 = 9$$

œuf

il faut 9 œuf pour 15 personnes.

Les élèves I et J ont utilisé une procédure mixte s'appuyant d'abord sur la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre, en divisant par 2 pour passer de 10 à 5, puis s'appuyant sur la propriété de linéarité pour l'addition⁶ en ajoutant la valeur correspondant à 10 personnes et celle correspondant à 5 personnes pour trouver la valeur correspondant à 15 personnes.

L'élève K a commencé de la même façon, mais pour trouver la valeur pour 15 personnes, il a utilisé le fait que 15 est le triple de 5. Il semble donc avoir utilisé deux fois la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre, mais il laisse apparent le calcul « $3+3+3=9$ », laissant penser qu'il a utilisé le fait que « $5+5+5=15$ ».

Retrouvez Éduscol sur



6. $f(5) = f(10/2) = f(10)/2 = 6/2 = 3$; $f(15) = f(10+5) = f(10) + f(5) = 6 + 3 = 9$

Exercice 6

Énoncé

Il faut 5 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes.

J'ai 3 œufs. Pour combien de personnes puis-je faire une mousse au chocolat ?
J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Exemples de réponses d'élèves

Élève L

1 œuf = 2 personnes. $3 \times 2 = 6$

On peut faire une mousse au chocolat pour 6 personnes.

Élève M

5 œufs = 10 personnes
donc
1 œuf = $\frac{2}{1}$ personnes
donc $\frac{3}{1} \times 2 = 6$
3 œufs = 6
Donc je pourrais faire une mousse pour 6 personnes.

Élève N

① $\frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$3 \times 2 = 6$

Avec 3 œufs on peut faire une mousse au chocolat pour 6 personnes

Élève O

Pour 6 personnes on multiplie le nombre œufs par 2.
 avec 5 œuf on peut faire une mousse au chocolat
 pour 10 personnes. donc avec 3 œufs
 on peut faire une mousse pour 6 personnes

Élève P

Il faut $\frac{1}{2}$ œuf par une personne
 Il faut $\frac{1}{2}$ œuf par une personne

Les élèves L et M ont explicitement fait apparaître la relation « 1 œuf à 2 personnes », qui s'apparente à un retour à l'unité.

L'élève N fait apparaître la division « 10 personnes \div 5 œufs ». Le résultat, 2, a alors un statut de coefficient de proportionnalité, dont on pourrait expliciter l'unité (personnes/œuf) qui est bien entendu implicite pour l'élève. Ce qui lui permet de mobiliser la propriété qu'avec n œufs, je régale $2n$ personnes. Et donc, avec 3 œufs je régale 6 personnes.

Il est souvent difficile, voire impossible de distinguer, à partir des seuls calculs sur les nombres (sans mention des unités), si le raisonnement utilisé s'apparente à un passage par l'unité ou bien à un calcul du coefficient de proportionnalité puis à son utilisation.

Mais imaginons qu'au lieu de mousse au chocolat il s'agisse d'un calcul de distance parcourue.

En 5 heures un robot parcourt 10 km : combien de km parcourt-il en 3 heures ?

Ici l'unité concernée est la vitesse, qui est naturellement mobilisable par un élève de fin de cycle 3. Les deux types de raisonnement sont alors plus facilement différenciables.

Raisonnement A

En 1 heure le robot parcourt 2 km, donc en 3 heures il parcourt trois fois plus de distance :

$$3 \times 2 \text{ km} = 6 \text{ km}$$

Raisonnement B

$10 \div 5 = 2$. Le Robot fait du 2 km/h. En 3 heures il parcourt :

$$3 \text{ h} \times 2 \text{ km/h} = 6 \text{ km}$$

Si l'on ne considère pas les grandeurs, mais seulement les nombres, les deux procédures reviennent au même : les mêmes calculs sont effectués.

La procédure utilisée par l'élève O est moins explicite, mais 2 apparaît bien comme le nombre par lequel il faut multiplier « 3 œufs » pour trouver « 6 personnes ».

L'élève P a lui utilisé deux fois la propriété de linéarité pour la multiplication en divisant d'abord par 10 pour trouver qu'il fallait un demi œuf pour 1 personne, puis en multipliant par 6.

Retrouvez Éduscol sur

